TD 7 : Applications Indications

E, F et G désignent des ensembles quelconques.

Images directes, images réciproques, etc.

1 ★ Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + 1$. Déterminer les ensembles suivants :

$$f(\mathbb{R}) \qquad f([0,1]) \qquad f^{-1}(\{3\}) \qquad f^{-1}(]-\infty,5])$$

En dessinant la courbe de f, deviner ce que sera la réponse, puis démontrer cela rigoureusement avec les caractérisations.

2 ★ Soit $f : x \mapsto x^2$. Déterminer les parties stables par f parmi les ensembles suivants :

$$[0,1] \qquad [1,2] \qquad [-1,1] \qquad \mathbb{R}_+$$

Pour chaque ensemble A, déterminer par un dessin ce que sera $f(A)$ pour savoir si A est stable par f. Puis, faites une preuve rigoureuse.

3 ★☆

1) Soit $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin\dfrac{\pi}{x}$. Déterminer $f^{-1}(\{0\})$ et $f(]0,1])$.
2) Soit $f : x \mapsto \sqrt{x^2+3x}$. Déterminer l'ensemble de définition D_f de f. Déterminer $f^{-1}([2,3\sqrt{2}])$.

Passer par la caractérisation et résoudre l'équation ou l'inéquation qui en résulte.

4 ★☆ Soit $f : E \to E$ une application. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille de parties de E, toutes stables par f. Montrer que les ensembles $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ sont stables par f.

L'outil principal est la caractérisation de $x \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ et $x \in \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$. La conclusion tombera ensuite assez rapidement.

5 ★☆ Soit $A, B \in \mathscr{P}(E)$ et $x \in E$.

1) Exprimer $\mathbb{1}_{\overline{A}}(x)$ en fonction de $\mathbb{1}_A(x)$
2) On suppose que $B \subset A$. Exprimer $\mathbb{1}_{A\setminus B}(x)$ en fonction de $\mathbb{1}_A(x)$ et de $\mathbb{1}_B(x)$.
3) Dans le cas général, exprimer $\mathbb{1}_{A\setminus B}(x)$ en fonction de $\mathbb{1}_A(x)$ et de $\mathbb{1}_B(x)$.
4) On suppose A et B disjoints. Exprimer $\mathbb{1}_{A\cup B}(x)$ en fonction de $\mathbb{1}_A(x)$ et de $\mathbb{1}_B(x)$.
5) Dans le cas général, exprimer $\mathbb{1}_{A\cup B}(x)$ en fonction de $\mathbb{1}_A(x)$ et de $\mathbb{1}_B(x)$. On pourra écrire $A \cup B$ comme une union disjointe de trois ensembles.

Faire des dessins et essayer de deviner quel va être le résultat. Vérifier que l'égalité fonctionne dans tous les cas pour x :

- $x \in A \setminus B$,
- $x \in B \setminus A$,
- $x \in A \cap B$
- et $x \notin A \cup B$

6 ★★ Soit $f : E \to F$ une application et $A, A' \in \mathscr{P}(E)$.

1) Montrer que : $\quad A \subset A' \implies f(A) \subset f(A')$
2) Exhiber un cas particulier où l'implication réciproque est fausse.
3) On suppose que f est injective. Montrer que :

$$f(A) \subset f(A') \implies A \subset A'$$

1) C'est une démonstration de cours.
2) Faites des patates ! La question 3 vous montre une situation ou l'implication réciproque est vraie. Il est probable que si on est en dehors de cette situation, des contre-exemples vont émerger.
3) Une implication est évidente. Pour l'autre, exploitez toutes les méthodes, définitions et caractérisations que vous connaissez.

7 ★★ Soit $f : E \to F$ une application et A, B deux parties de E.

1) Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$.
2) Exhiber un cas particulier où l'inclusion réciproque est fausse.
3) On suppose que f est injective. Montrer que :

$$f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$$

1) C'est une démonstration de cours.
2) Faites des patates ! La question 3 vous montre une situation ou l'inclusion réciproque est vraie. Il est probable que si on est en dehors de cette situation, des contre-exemples vont émerger.
3) Une inclusion est évidente. Pour l'autre, exploitez toutes les méthodes, définitions et caractérisations que vous connaissez.

8 ★★ Soit $f : E \to F$ une application.

1) Montrer que : $\forall A \in \mathscr{P}(E) \qquad A \subset f^{-1}(f(A))$
2) Montrer que : $\forall B \in \mathscr{P}(F) \qquad f(f^{-1}(B)) \subset B$
3) Montrer que f est surjective si et seulement si :

$$\forall B \in \mathscr{P}(F) \qquad f(f^{-1}(B)) = B$$

4) Montrer que f est injective si et seulement si :

$$\forall A \in \mathscr{P}(E) \qquad A = f^{-1}(f(A))$$

C'est plus facile à vérifier qu'il n'y parait. Servez-vous des différentes caractérisations avec rigueur et précision.

Injectivité, surjectivité, bijectivité

9 ★★ Les applications suivantes sont-elles injectives, surjectives, bijectives ?

$$f_1 : \begin{array}{l} \mathbb{N} \to \mathbb{N} \\ n \mapsto n+1 \end{array} \qquad f_2 : \begin{array}{l} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \\ n \mapsto n-3 \end{array} \qquad f_3 : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ (x,y) \mapsto x-y \end{array}$$

$$f_4 : \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto z^2 \end{array} \qquad f_5 : \begin{array}{l} \mathbb{C} \to \mathbb{C} \\ z \mapsto e^z \end{array} \qquad f_6 : \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2 \\ x \mapsto (x,-x) \end{array}$$

$$f_7 : \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (x+y, x-y) \end{array} \qquad f_8 : \begin{array}{l} \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^* \to \mathbb{Q} \\ (a,b) \mapsto \dfrac{a}{b} \end{array}$$

Pour chaque fonction $f : E \to F$, essayez d'abord de prouver que f est injective. Si vous "bloquez", c'est sans doute que f n'est pas injective et le point de blocage peut vous aider à comprendre pourquoi.

Pour la surjectivité, si f n'est pas surjective, on peut parfois s'en rendre compte avec des patates. Sinon, il faut essayer, pour chaque $y \in F$ de résoudre l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$. De même, vous verrez si cela fonctionne en pratique ou non.

10 ★★☆ Soit $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par

$$F(x,y,z) = (-x+y+z,\, z,\, y)$$

Calculer l'expression de $F \circ F$. Que peut-on en déduire sur F ?

On doit trouver $F \circ F = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$. La suite relève du cours.

11 ★★☆ Soit $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tels que $a \neq 0$, $c \neq 0$ et $ad \neq bc$. On considère l'application

$$f : \begin{array}{l} \mathbb{C} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\} \to \mathbb{C} \setminus \left\{\dfrac{a}{c}\right\} \\ z \mapsto \dfrac{az+b}{cz+d} \end{array}$$

1) Montrer que f est bien définie.
2) Montrer que f est bijective. Déterminer sa réciproque.

1) Il suffit de vérifier que $f(z) \neq \dfrac{a}{c}$. Quel raisonnement peut-on utiliser ?
2) On montrera que pour tout $u \in \mathbb{C} \setminus \left\{\dfrac{a}{c}\right\}$, l'équation $(\mathrm{Eq}_u) : \quad f(z) = u$ d'inconnue $z \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\dfrac{d}{c}\right\}$ admet une unique solution qu'on calculera.

12 ★★ Soit f et g dans $\mathscr{F}(\mathbb{N}, \mathbb{N})$ les applications définies par :

$$f(n) = 2n \qquad \text{et} \qquad g(n) = \begin{cases} n/2 & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

1) Montrer que f et g ne sont pas bijectives.
2) Calculer $f \circ g$ et $g \circ f$. Sont-elles bijectives ?

1) Il y a un défaut d'injectivité pour l'une, un défaut de surjectivité pour l'autre.

13 ★★ Soit $p : E \to E$ telle que $p \circ p = p$ (on dit que p est idempotente).

1) Montrer que si p est injective alors $p = \mathrm{id}_E$.
2) Montrer que si p est surjective alors $p = \mathrm{id}_E$.

Pour tout $x \in E$, montrer que $p(x) = x$ en utilisant astucieusement les définitions.

14 ★★ Soit $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1) Montrer que si $g \circ f$ est injective, alors f est injective.
2) Montrer que si $g \circ f$ est surjective, alors g est surjective.
3) Montrer que si $g \circ f$ est bijective, alors f est injective et g est surjective.

Méthode vue en démonstration de cours.

15 ★★☆ Soit $f \in F^E$, $g \in G^F$ et $h \in H^G$ trois applications. On suppose que $g \circ f$ et $h \circ g$ sont bijectives. Montrer que f, g et h sont bijectives.
Utiliser le résultat démontré dans un autre exercice plus haut : si $g \circ f$ est bijective, alors f est injective et g est surjective.

16 ★★★ Soit $f : E \to F$ une application. On définit les applications :

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathscr{P}(E) & \to & \mathscr{P}(F) \\ A & \mapsto & f(A) \end{array} \qquad \psi : \begin{array}{rcl} \mathscr{P}(F) & \to & \mathscr{P}(E) \\ B & \mapsto & f^{-1}(B) \end{array}$$

1) Montrer que f est injective $\iff$ φ est injective $\iff$ ψ est surjective.
2) Montrer que f est surjective $\iff$ φ est surjective $\iff$ ψ est injective.

Montrer que f est injective si et seulement si φ est injective, puis montrer que f est injective si et seulement si ψ est surjective.

17 ★★★☆ (*Théorème de Cantor*) Soit E un ensemble non vide.

1) Construire un exemple simple d'injection de E dans $\mathscr{P}(E)$.
2) Soit $f : E \to \mathscr{P}(E)$. En considérant $A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$, montrer que f ne peut être une surjection (et donc une bijection) de E sur $\mathscr{P}(E)$.
3) En déduire qu'il n'existe pas d'injection de $\mathscr{P}(E)$ sur E. *(théorème de Cantor)*
4) En déduire qu'il n'existe pas d'ensemble contenant tous les ensembles.

1) Si $x \in E$, quel est un exemple simple d'élément de $\mathscr{P}(E)$ qu'on pourrait associer de manière unique à x ?
2) Raisonner par l'absurde et considérer $z \in E$ tel que $f(z) = A$.
3) Si on disposait d'une injection, on pourrait la transformer en bijection par une opération du cours...

Transformations du plan

18 ★ Reconnaitre les similitudes définies par

$$f_1(z) = z + i\sqrt{3} \qquad f_2(z) = 2iz + 1$$

$$f_3(z) = (1-i)z + 3i \qquad f_4(z) = (i+\sqrt{3})z - 2 + 3i$$

C'est immédiat par le cours.

19 ★ Donner l'expression explicite des transformations suivantes :

1) Rotation de centre Ω d'affixe $1+i$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
2) Homothétie de centre Ω d'affixe $2i$ et de rapport 3.
3) Similitude directe de centre Ω d'affixe $1-i$ de rapport 2 et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

C'est immédiat par le cours.

20 ★☆ Déterminer la similitude qui envoie le complexe i sur $2i$ et le complexe 1 sur -2. On déterminera également la rotation et l'homothétie qui la constituent.
Si on appelle f cette similitude, alors on peut écrire $f : z \mapsto az + b$ avec $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$. On peut reformuler l'hypothèse sur f ainsi : $f(i) = 2i$ et $f(1) = -2$.